Chapitre 6 : Racines carrées.

I. Racines carrées: définition et propriétés fondamentales.

Attention ! On ne peut parler de la racine carrée d'un nombre que si celui-ci est positif !

Définition 1 : Soit a un nombre positif. Il existe un nombre positif unique dont le carré est égal à a.
Ce nombre est appelé « racine carrée de a » et se note $\sqrt{a}$.

Exemples : $\sqrt{1}$ = 1 ; $\sqrt{4}$ = 2 ; $\sqrt{9}$ = 3 ; $\sqrt{16}$ = 4 ; $\sqrt{25}$ = 5 ; $\sqrt{36}$ = 6 ; $\sqrt{49}$ = 7, etc...

Remarques : Ainsi, la racine carrée d'un nombre est toujours positive.
En fait la notation $\sqrt{...}$ remplace une puissance fractionnaire : $\sqrt{a}$ signifie $a^{1/2}$.
On retrouvera donc avec les racines carrées les mêmes règles de calcul que sur les puissances.
On ne verra pas de méthode qui permettrait de calculer à la main la racine carrée d'un nombre : on utilisera la touche « $\sqrt{...}$ » de la calculatrice.

Propriété 1 : Quel que soit le nombre a positif :
$(\sqrt{a})^2 = a$
$\sqrt{a^2} = a$.

Exemples : $(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$.
$\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$.

II. Règles de calcul sur les racines carrées.

Attention !!!! L'addition et la soustraction « ne marchent pas » !!
En effet, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$.

Propriété 2 :
Quels que soient les nombres a et b positifs, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.

Quels que soient les nombres a et b positifs ($b\neq 0$), $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemples : $\sqrt{32}\times\sqrt{2}=\sqrt{32\times 2}=\sqrt{64}=8$.
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{27}{48}}=\sqrt{\frac{3\times3\times3}{2\times2\times2\times2\times3}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.

III. Equation x^2 = a.

Propriété 3:
Soit a un nombre donné.
# Si a < 0, l'équation x^2 = a n'a pas de solution. S = ∅.
# Si a = 0, l'équation x^2 = 0 a une solution : le nombre 0. S = {0}.
# Si a > 0, l'équation x^2 = a a deux solutions : l'une positive, $\sqrt{a}$ et l'autre négative, $-\sqrt{a}$.
S = { $\sqrt{a}$; $-\sqrt{a}$ }.

Exemples :
L'équation x^2 = 7 a pour ensemble de solutions : S = { $\sqrt{7}$; $-\sqrt{7}$ }.
L'équation x^2 = -1 a pour ensemble de solutions : S = ∅.

Remarque : Une équation dans laquelle la plus grande puissance de x est x^n possède au plus n solutions. On dit que c'est une équation du $n^{\text{ième}}$ degré. Ainsi x^2 = a est une équation du second degré.

Méthode pour « simplifier une racine carrée » : voir côté exercices.

IV. Méthodes : transformer des écritures contenant des racines carrées.

Il s'agit de mettre l'expression mathématique sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers, avec b le plus petit possible (si a=1, on obtient une écriture de la forme $\sqrt{b}$; si b=1, on obtient une écriture de la forme a).

Expression à transformer :	$\sqrt{4860}$
On cherche le plus grand carré dans le nombre (par exemple en utilisant sa décomposition en facteurs premiers). On écrit le nombre sous la forme « un carré×un nombre ».	$4860 = 2^2\times3^5\times5$ $= 2^2\times3^4\times3\times5$ J'extrais un maximum d'exposants pairs $=(2^1\times3^2)^2\times3\times5$ $= \quad 18^2 \quad \times 15$ *(fin du premier calcul)*
Attention, on fait 2 calculs : - Un calcul sur le nombre - Un calcul sur sa racine. $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ $\sqrt{a^2}=a$ On peut omettre le signe « × » entre un nombre et une racine.	$\sqrt{4860}=\sqrt{18^2\times15}$ $=\sqrt{18^2}\times\sqrt{15}$ $=18\times\sqrt{15}$ $=18\sqrt{15}$ *(fin du deuxième calcul)*

Exemples d'application :

$$\begin{aligned}&6\sqrt{2}+\sqrt{18}\\&=6\sqrt{2}+\sqrt{2\times3\times3}\\&=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\\&=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times3\\&=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}\\&=9\sqrt{2}\end{aligned}$$

En effet, quand plusieurs termes contiennent la racine carrée du même nombre, on met cette racine carrée en facteur ; par exemple : $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(5-2+1)\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

Attention, tout ne se simplifie pas, par exemple on ne peut pas simplifier $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Remarques pour le brevet :

On trouve souvent des sujets qui demandent d'écrire une expression sous la forme $a\sqrt{b}$.
Les racines carrées sont souvent mélangées à « du Pythagore » ou/et des produits remarquables.

A l'instar des calculs sur les fractions, le résultat d'un calcul comportant des racines carrées doit toujours être présenté sous forme « simplifiée ».

N.B. : Votre calculatrice simplifie très bien les écritures comportant des racines carrées, cela peut au moins servir à vérifier vos résultats !!!